Corrigé du Concours Blanc Maths A
Version longue

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{ P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; PP^T = I_n \right\}.$$

Problème I - Une application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

On considère

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7a-5c & 3b-3d \\ -5a+7c & -3b+3d \end{pmatrix} \end{array}.$$

On admet que f est linéaire.

1. On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\boxed{\text{la famille } \mathscr{C} = (E_1, E_2, E_3, E_4) \text{ est la base canonique de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ et } \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) = 4.}$$

2. On observe que

$$f(E_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = \frac{7}{2}E_1 - \frac{5}{2}E_3.$$

Donc la première colonne de A est $\begin{bmatrix} 7/2 \\ 0 \\ -5/2 \\ 0 \end{bmatrix}$. De même,

$$f(E_2) = \frac{3}{2}E_2 - \frac{3}{2}E_4, \qquad f(E_3) = -\frac{5}{2}E_1 + \frac{7}{2}E_3, \qquad f(E_4) = -\frac{3}{2}E_2 + \frac{3}{2}E_4.$$

Conclusion,

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

3. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
u \in \operatorname{Ker}(A) \quad &\Leftrightarrow \quad Au = 0_{\mathbb{R}^4} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ -5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 7x - 5z = 0 \\ 3y - 3t = 0 \\ -5x + 7z = 0 \\ -3y + 3t = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 7x - 5z = 0 \\ y - t = 0 \\ \left(7 - \frac{25}{7}\right) z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{5}{7} L_1 \\ L_4 \leftarrow -\frac{1}{3} L_4 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 7x - 5z = 0 \\ y - t = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{car } L_4 = L_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = z = 0 \\ y = t \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad u = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ y \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}_{=u_K}.}$$

On note que u_K est non nul et donc forme une famille libre et engendre $\operatorname{Ker}(A)$ donc u_k est une base de $\operatorname{Ker}(A)$. Puisque f est canoniquement associé à A dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on a

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).}$$

4. Par la question précédente, (u_K) est une base de $\operatorname{Ker}(A)$. Donc

$$\dim(\operatorname{Ker}(A)) = 1.$$

Par le théorème du rang matriciel, on en déduit que

$$\operatorname{rg}(A) = 4 - \dim(\operatorname{Ker}(A)) = 4 - 1 = 3.$$

Toute base de $\operatorname{Im}(A)$ sera donc constituée de trois vecteurs. On a

$$\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right).$$

On note que $C_4 = -C_2$, on peut donc ôter C_4 (ce qui est cohérent avec le rang observé).

$$\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}7\\0\\-5\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\3\\0\\-3\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-5\\0\\7\\0\end{bmatrix}\right).$$

De plus, les opérations élémentaires ne modifiant pas l'espace engendré, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(A) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}7\\0\\-5\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-5\\0\\7\\0\end{bmatrix}\right) && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow 2C_1 \\ C_2 \leftarrow \frac{2}{3}C_2 \\ C_3 \leftarrow 2C_3 \end{array}\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}2\\0\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-5\\0\\7\\0\end{bmatrix}\right) && C_1 \leftarrow C_1 + C_2\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-5\\0\\7\\0\end{bmatrix}\right) && C_1 \leftarrow \frac{1}{2}C_1\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right) && C_3 \leftarrow \frac{1}{12}\left(C_3 + 5C_1\right)\\
&= \mathrm{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right)}_{=\mathscr{B}_I} && C_1 \leftarrow C_1 - C_3
\end{aligned}$$

La famille $\mathscr{B}_I$ engendre $\mathrm{Im}\,(A)$. Montrons qu'elle est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = O_2.$$

Alors,

$$\begin{cases} a = 0\\ b = 0\\ c = 0\\ -d = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c = 0.$$

Donc $\mathscr{B}_I$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_I = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathrm{Im}\,(A)\,.}$$

Puisque f est canoniquement associée à A dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on en déduit que

$$\boxed{\mathscr{B}'_I = \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\right) = (E_1, E_2 - E_4, E_3) \text{ est une base de } \operatorname{Im}(f).}$$

On pose

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \quad e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

Enfin on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

5. *Méthode 1, par la représentation matricielle.* Posons $P = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$. On a

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\-1 & 0 & 1 & 0\\0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Puis,

$$P \underset{\mathscr{L}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}L_3 \leftarrow \frac{1}{2}(L_3 + L_1)\\ L_4 \leftarrow \frac{1}{2}(L_2 + L_4).\end{matrix}$$

La matrice obtenue est triangulaire avec aucun zéro sur la diagonale. Donc P est inversible. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est un base de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

Méthode 2, par le rang. On a les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(\mathscr{B}) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\right) && \forall i \in [\![1;4]\!],\ C_i \leftarrow \sqrt{2}C_i\\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\-2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}\right) && \begin{matrix}C_3 \leftarrow C_3 - C_1\\ C_4 \leftarrow C_4 - C_2\end{matrix}\\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) && \begin{matrix}C_3 \leftarrow -\frac{1}{2}C_3\\ C_4 \leftarrow -\frac{1}{2}C_4\end{matrix}\\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) && \begin{matrix}C_1 \leftarrow C - C_3\\ C_2 \leftarrow C_2 - C_4\end{matrix}\\
&= 4
\end{aligned}$$

car on reconnait la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Donc $\operatorname{rg}(\mathscr{B}) = 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) = \operatorname{Card}(\mathscr{B})$. Donc $\mathscr{B}$ est libre et génératrice, conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est un base de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

Méthode 3, par la liberté. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = O_2.$$

Alors

$$\begin{cases}a + c = 0\\ b + d = 0\\ -a + c = 0\\ -b + d = 0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}a + c = 0\\ b + d = 0\\ 2c = 0\\ 2d = 0\end{cases} \qquad \begin{matrix}L_3 \leftarrow L_3 + L_1\\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2.\end{matrix}$$

Donc $a = b = c = d = 0$. Donc $\mathscr{B}$ est libre. De plus $\operatorname{Card}(\mathscr{B}) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est un base de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

6. On a les égalités entre matrices suivantes :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) && \text{par linéarité} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 7+5 & 0 \\ -5-7 & 0 \end{pmatrix} && \text{par définition de } f \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = 6e_1. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} f(e_2) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 3+3 \\ 0 & -3-3 \end{pmatrix} = 3e_2 \\ f(e_3) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 7-5 & 0 \\ -5+7 & 0 \end{pmatrix} = e_3 \\ f(e_4) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 3-3 \\ 0 & -3+3 \end{pmatrix} = O_2 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(e_1) = 6e_1, \qquad f(e_2) = 3e_2, \qquad f(e_3) = e_3, \qquad f(e_4) = O_2.}$$

On en déduit alors directement que

$$\boxed{D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

7. On a vu que $f(e_4) = O_2$. Donc e_4 est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f)$. Or on sait également que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$. Conclusion,

$$\boxed{(e_4) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f).}$$

On observe les points suivants :

- Puisque $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est une sous-famille de $\mathscr{B}$ et que $\mathscr{B}$ est une base et donc libre, on en déduit que $\mathscr{B}_0$ est une famille libre.
- De plus, on a $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = 3$. Donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_0)$.
- Enfin montrons que $\mathscr{B}_0$ est une famille de vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ *(important !)*. Puisque $f(e_1) = 6e_1$, alors, par linéarité de f,
$$e_1 = \frac{1}{6} f(e_1) = f\left(\frac{e_1}{6}\right).$$
Donc $e_1 \in \mathrm{Im}(f)$. De même, $e_2 = f\left(\frac{e_2}{3}\right) \in \mathrm{Im}(f)$ et $e_3 = f(e_3) \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $\mathscr{B}_0$ est bien une famille de vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$.

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f).}$$

8. Par la question 5. on a

$$\boxed{P = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

9. Par la formule de changement de base, on a

$$\boxed{A = PDP^{-1} \qquad \text{i.e.} \qquad D = P^{-1}AP.}$$

Comment aurions-nous pu nous tromper sur cette formule ?

10. Inutile de calculer P^{-1} ! Il suffit de montrer que $PP^T = I_4$. On a

$$PP^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I_4.$$

Conclusion,

$$\boxed{P \in \mathscr{O}_4(\mathbb{R}).}$$

11. Soit E un espace vectoriel. Soient p un projecteur de E et g un endomorphisme de E.

(a) Supposons que $g \circ p = g$. Montrons que $\operatorname{Ker}(p) \subseteq \operatorname{Ker}(g)$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(p)$. Alors $p(x) = 0_E$. Donc en composant par g, $g(p(x)) = g(0_E) = 0_E$ car g linéaire. Donc $g \circ p(x) = 0_E$. Or $g \circ p = g$. Donc

$$g(x) = g \circ p(x) = 0_E.$$

Donc $x \in \operatorname{Ker}(g)$. Ceci étant vrai pour $x \in \operatorname{Ker}(p)$ quelconque, on en déduit que $\operatorname{Ker}(p) \subseteq \operatorname{Ker}(g)$ et donc

$$g \circ p = g \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{Ker}(p) \subseteq \operatorname{Ker}(g).$$

Réciproquement, supposons que $\operatorname{Ker}(p) \subseteq \operatorname{Ker}(g)$. Montrons que $g \circ p = g$. Soit $x \in E$. Puisque p est un projecteur, on sait que $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$. Donc il existe $x_1 \in \operatorname{Ker}(p)$ et $x_2 \in \operatorname{Im}(p)$ tel que $x = x_1 + x_2$. Dès lors,

$$\begin{aligned} g \circ p(x) &= g \circ p(x_1 + x_2) \\ &= g(p(x_1) + p(x_2)) && \text{par linéarité} \\ &= g(p(x_2)) && \text{car } x_1 \in \operatorname{Ker}(p) \\ &= g(x_2) && \text{car } x_2 \in \operatorname{Im}(p) = \{u \in E \mid p(u) = u\} \text{ car } p \text{ est un projecteur.} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$g(x) = g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2).$$

Or $x_1 \in \operatorname{Ker}(p) \subseteq \operatorname{Ker}(g)$. Donc $g(x_1) = 0_E$. Ainsi,

$$g(x) = g(x_2) = g \circ p(x).$$

Ceci étant vrai pour $x \in E$ quelconque, on en déduit que $g = g \circ p$ et donc

$$\operatorname{Ker}(p) \subseteq \operatorname{Ker}(g) \qquad \Rightarrow \qquad g \circ p = g.$$

Conclusion,

$$\boxed{g \circ p = g \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{Ker}(p) \subseteq \operatorname{Ker}(g).}$$

(b) Supposons $p \circ g = g$. Soit $y \in \operatorname{Im}(g)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Montrons que $y \in \operatorname{Im}(p)$ sachant que $\operatorname{Im}(p) = \{u \in E \mid p(u) = u\}$ car p est un projecteur. On a

$$p(y) = p(g(x)) = p \circ g(x) = g(x) = y.$$

Donc $y \in \operatorname{Im}(p)$. Ceci étant vrai pour $y \in \operatorname{Im}(g)$ quelconque, on en déduit que $\operatorname{Im}(g) \subseteq \operatorname{Im}(p)$ et donc

$$p \circ g = g \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{Im}(g) \subseteq \operatorname{Im}(p).$$

Réciproquement, supposons $\mathrm{Im}\,(g) \subseteq \mathrm{Im}\,(p)$. Montrons que $p \circ g = g$. Soit $x \in E$. Alors $y = g(x) \in \mathrm{Im}\,(g) \subseteq \mathrm{Im}\,(p)$. Or puisque p est un projecteur, $\mathrm{Im}\,(p) = \{u \in E \mid p(u) = u\}$. Donc $p(y) = y$ i.e.

$$p\,(g(x)) = g(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on en déduit que $p \circ g = g$ et donc

$$\mathrm{Im}\,(g) \subseteq \mathrm{Im}\,(p) \qquad \Rightarrow \qquad p \circ g = g.$$

Conclusion,

$$\boxed{p \circ g = g \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Im}\,(g) \subseteq \mathrm{Im}\,(p)\,.}$$

12. On a vu dans les questions précédentes que

- (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$,
- (e_4) est une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$,
- $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de $\mathscr{M}_2\,(\mathbb{R})$.

Directement, par le théorème de la base adaptée,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f) = \mathscr{M}_2\,(\mathbb{R})\,.}$$

13. Puisque q est la projection sur $\mathrm{Im}\,(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(f)$, on en déduit que directement que $\mathrm{Ker}\,(q) = \mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(q) = \mathrm{Im}\,(f)$. En particulier, $\mathrm{Ker}\,(q) \subseteq \mathrm{Ker}\,(f)$. Donc par la question 11.a $f \circ q = f$. De même $\mathrm{Im}\,(f) \subseteq \mathrm{Im}\,(q)$ donc $q \circ f = f$. Ainsi,

$$\boxed{q \circ f = f = f \circ q.}$$

14. On pose $F = \mathrm{Im}\,(f)$. On note f_0 la restriction de f sur F autrement dit l'application définie par

$$\forall x \in F = \mathrm{Im}\,(f)\,, \qquad f_0(x) = f(x).$$

(a) Montrons que f_0 est bien définie, à valeurs dans F et linéaire.

- Puisque $F \subseteq \mathscr{M}_2\,(\mathbb{R})$, f est bien définie sur F et donc par construction f_0 aussi.
- Soit $x \in F$. Montrons que $f_0(x) \in F$. Par définition, $f_0(x) = f(x) \in \mathrm{Im}\,(f) = F$. Donc f_0 va bien de F dans F.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in F$. Posons $z = \lambda\, x + \mu y$. Puisque F est un espace vectoriel (car $\mathrm{Im}\,(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2\,(\mathbb{R})$), on en déduit que $z \in F$ et donc $f_0\,(z)$ existe. De plus,

$$f_0(z) = f_0\,(\lambda\, x + \mu y) = \lambda\, f(x) + \mu f(y) \qquad \text{par linéarité de } f.$$

Or $x \in F$ et $y \in F$ donc $f(x) = f_0(x)$ et $f(y) = f_0(y)$. Ainsi,

$$f_0\,(\lambda\, x + \mu y) = \lambda\, f_0(x) + \mu f_0(y).$$

Donc f_0 est linéaire.

Conclusion,

$$\boxed{f_0 \text{ est un endomorphisme de } F.}$$

(b) Par ce qui précède, on a $f_0\,(e_1) = f\,(e_1) = 6e_1$ mais aussi $f_0\,(e_2) = 3e_2$ et $f\,(e_3) = e_3$. Conclusion,

$$\boxed{D_0 = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_0}\,(f_0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Problème II - Isométries de $\mathbb{R}^2$

On considère

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ (a,b) & \mapsto & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \end{array}$$

1. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$. Posons $w = \lambda u + \mu v$. On a

$$w = \begin{bmatrix} \lambda x + \mu a \\ \lambda y + \mu b \end{bmatrix}.$$

   Par suite,

$$\varphi(w) = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu a & -(\lambda y + \mu b) \\ \lambda y + \mu b & \lambda x + \mu a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \lambda \varphi(u) + \mu \varphi(v).$$

   Ainsi, $\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda \varphi(u) + \mu \varphi(v)$. Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$$

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$(a,b) \in \operatorname{Ker}(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = O_2 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}.}$$

3. Puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, par le théorème du rang et la question précédente,

$$\operatorname{rg}(\varphi) = \dim\left(\mathbb{R}^2\right) - \dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = 2 - 0 = 2.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{rg}(\varphi) = 2.}$$

4. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a l'équivalence suivante

$$A \in \operatorname{Im}(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   D'où,

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Vect}\underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)}_{=\mathscr{B}_I}.$$

   La famille $\mathscr{B}_I$ est libre car les deux matrices ne sont pas colinéaires et $\mathscr{B}_I$ engendre $\operatorname{Im}(\varphi)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_I = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \operatorname{Im}(\varphi).}$$

5. Par ce qui précède, $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. Donc φ est injective. D'autre part, on a aussi $\operatorname{rg}(\varphi) = 2 \neq 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$. Donc $\operatorname{Im}(\varphi) \neq \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et φ n'est pas surjective. Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est injective mais non surjective.}}$$

On considère $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On rappelle alors que $\mathscr{C} = (1, i)$ est la base canonique de $\mathbb{C}$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose f_{a+ib} l'endomorphisme de $\mathbb{C}$ canoniquement associé à la matrice $\varphi(a, b)$.

6. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha = a + ib$. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(z) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Donc

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f(z)) = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)\, \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{bmatrix}$$

Ainsi,

$$f(z) = (ax - by) + i\,(bx + ay)\,.$$

D'autre part,

$$\alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}(z) = \alpha z = (a + ib)(x + iy) = ax + iay + ibx - by = (ax - by) + i\,(bx + ay) = f(z).$$

Donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f(z) = \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}(z)\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{f = \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}.}$$

7. Si $\alpha = 0$, $f_0 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{C})}$ n'est pas un automorphisme.
Si $\alpha \neq 0$, alors f_α est inversible et $f_\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}} = f_{1/\alpha}$. En effet,

$$f_\alpha \circ f_{1/\alpha} = \alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \circ \left(\frac{1}{\alpha}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}\right) = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}.$$

De même, $f_{1/\alpha} \circ f_\alpha = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. Conclusion,

$$\boxed{f_\alpha \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha \neq 0_{\mathbb{C}}.}$$

8. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \varphi(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ inversible} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f_{a+ib}) \text{ inversible} \\ &\Leftrightarrow \quad f_{a+ib} \text{ bijective} \\ &\Leftrightarrow \quad a + ib \neq 0_{\mathbb{C}} \qquad \text{par la question précédente} \\ &\Leftrightarrow \quad (a, b) \neq 0_{\mathbb{R}^2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi(a, b) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \qquad \Leftrightarrow \qquad (a, b) \neq 0_{\mathbb{R}^2}.}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$ et $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. Soit $F = \{ f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathbb{C}) \mid \alpha \in \mathbb{C} \}$.

9. (a) On observe les points suivants :
   - $F \subseteq \mathscr{L}(\mathbb{C})$ par définition.
   - Si $f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{C})}$. Alors, pour $\alpha = 0_{\mathbb{C}}$, on a $f = f_\alpha \in F$. Donc $0_{\mathscr{L}(\mathbb{C})} \in \mathscr{L}(\mathbb{C})$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(f, g) \in F^2$. Puisque $f \in F$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f = f_\alpha$ et de même $g \in F$, donc il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $g = f_\beta$. Posons $h = \lambda f + \mu g = \lambda f_\alpha + \mu f_\beta$. Alors, par la question 6.

   $$h = \lambda(\alpha \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}) + \mu(\beta \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}) = (\lambda\alpha + \mu\beta)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}.$$

   Posons $\gamma = \lambda\alpha + \mu\beta \in \mathbb{C}$. Dès lors, $h = \gamma \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} = f_\gamma \in F$. Donc $\lambda f + \mu g \in F$ et F est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion,

$$\boxed{F \text{ est un } \mathbb{C}\text{-sous-espace vectoriel de } \mathscr{L}(\mathbb{C}).}$$

(b) Soit $(u,v) \in F^2$. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$, $u = f_\alpha$ et $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $v = f_\beta$. Par suite, par la question 6.

$$u \circ v = f_\alpha \circ f_\beta = (\alpha \mathrm{Id}_\mathbb{C}) \circ (\beta \mathrm{Id}_\mathbb{C}) = \alpha\beta \mathrm{Id}_\mathbb{C}.$$

Posons $\gamma = \alpha\beta \in \mathbb{C}$, alors $u \circ v = \gamma \mathrm{Id}_\mathbb{C} = f_\gamma \in F$. Conclusion,

$$\boxed{\forall (u,v) \in F^2, \qquad u \circ v \in F.}$$

(c) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Procédons par récurrence. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$: « $f_\alpha^k \in F$ ».
Initialisation. Si $k = 0$. Alors, $f_\alpha^0 = \mathrm{Id}_\mathbb{C} = 1 \times \mathrm{Id}_\mathbb{C} = f_1 \in F$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie : $f_\alpha^k \in F$. Posons $u = f_\alpha^k$ et $v = f$. On a donc $u \in F$ et par définition de F, $v \in F$. Donc par la question précédente, $u \circ v \in F$. Autrement dit,

$$f_\alpha^{k+1} = f_\alpha^k \circ f_\alpha = u \circ v \in F.$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad f_\alpha^k \in F.}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

(a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Toujours par la question 6. on remarque que

$$f_\alpha^n = (\alpha \mathrm{Id}_\mathbb{C}) \circ \cdots \circ (\alpha \mathrm{Id}_\mathbb{C}) = \alpha^n \mathrm{Id}_\mathbb{C}.$$

Par suite, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f_\alpha^n = f_{1+i} \circ f_\alpha \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha^n \mathrm{Id}_\mathbb{C} = ((1+i)\,\mathrm{Id}_\mathbb{C}) \circ (\alpha \mathrm{Id}_\mathbb{C}) \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha^n \mathrm{Id}_\mathbb{C} = \alpha\,(1+i)\,\mathrm{Id}_\mathbb{C}. \end{aligned}$$

Notamment en évaluant en $z = 1$, $\alpha^n = \alpha\,(1+i)$. Réciproquement si $\alpha^n = \alpha\,(1+i)$, alors $\alpha^n \mathrm{Id}_\mathbb{C} = \alpha\,(1+i)\,\mathrm{Id}_\mathbb{C}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f_\alpha^n = f_{1+i} \circ f_\alpha \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha^n = \alpha\,(1+i) \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \ \text{ OU } \ \alpha^{n-1} = 1+i \qquad \text{car } n \geqslant 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \ \text{ OU } \ \alpha^{n-1} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \ \text{ OU } \ \exists k \in [\![0; n-2]\!],\ \alpha = \left(\sqrt{2}\right)^{1/(n-1)} \mathrm{e}^{i\left(\frac{2k\pi}{n-1} + \frac{\pi}{4(n-1)}\right)} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \ \text{ OU } \ \exists k \in [\![0; n-2]\!],\ \alpha = 2^{\frac{1}{2(n-1)}}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{2k\pi}{n-1} + \frac{\pi}{4(n-1)}\right)}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0_\mathbb{C}\} \cup \left\{ 2^{\frac{1}{2(n-1)}}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{2k\pi}{n-1} + \frac{\pi}{4(n-1)}\right)} \ \middle|\ k \in [\![0; n-2]\!] \right\}.}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a directement

$$\boxed{\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1.}$$

(c) En particulier, pour $x = \frac{\pi}{8}$,

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) = \frac{\sqrt{2}+2}{4}.$$

Or $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}.$$

On peut aussi procéder de même pour le sinus à partir de $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$. Ou alors,

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}+2}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

De même $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$. Conclusion,

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.}$$

(d) Soit $M \in \operatorname{Im}(\varphi)$. Alors, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$M = \varphi(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f_{a+ib}).$$

Posons $\alpha = a + ib$. Alors $M = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f_\alpha)$. D'autre part,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \varphi(1, 1) = f_{1+i}.$$

Ainsi,

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M \qquad \Leftrightarrow \qquad f_\alpha^n = f_{1+i} \circ f_\alpha.$$

Donc par la question précédente,

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha = 0 \ \text{ OU } \ \exists k \in [\![0; n-2]\!],\ \alpha = 2^{\frac{1}{2(n-1)}}\, \mathrm{e}^{i\left(\frac{2k\pi}{n-1} + \frac{\pi}{4(n-1)}\right)}$$

Donc pour $n = 3$, on a $k = 0$ ou $k = 1$:

$$\begin{aligned}
& M^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M \\
\Leftrightarrow \quad & \alpha = 0 \ \text{ OU } \ \alpha = 2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}} \ \text{ OU } \ \alpha = 2^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{e}^{i\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right)} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \ \text{OU} \ \begin{cases} a = \sqrt{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ b = \sqrt{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{cases} \ \text{OU} \ \begin{cases} a = -\sqrt{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ b = -\sqrt{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \ \text{OU} \ \begin{cases} a = \sqrt{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ b = \sqrt{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases} \ \text{OU} \ \begin{cases} a = -\sqrt{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ b = -\sqrt{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \ \text{OU} \ \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} \\ b = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2} \end{cases} \ \text{OU} \ \begin{cases} a = -\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} \\ b = -\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2} \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \ \text{OU} \ \begin{cases} a = \sqrt{2}\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2} \\ b = \sqrt{2}\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2} \end{cases} \ \text{OU} \ \begin{cases} a = -\sqrt{2}\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2} \\ b = -\sqrt{2}\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion, les solutions de $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M$ sont

$$\boxed{M = O_2 \text{ OU } M = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{2}+1} & -\sqrt{\sqrt{2}-1} \\ \sqrt{\sqrt{2}-1} & \sqrt{\sqrt{2}+1} \end{pmatrix} \text{ OU } M = -\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{2}+1} & -\sqrt{\sqrt{2}-1} \\ \sqrt{\sqrt{2}-1} & \sqrt{\sqrt{2}+1} \end{pmatrix}.}$$

11. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et

$$(E): \qquad f_\alpha^2 - (2-4i)\, f_\alpha - (3+6i)\, f_\alpha^0 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{C})}.$$

Par la question 6.

$$\begin{aligned} (E) \quad &\Leftrightarrow \quad (\alpha \mathrm{Id}_\mathbb{C}) \circ (\alpha \mathrm{Id}_\mathbb{C}) - (2-4i)\,(\alpha \mathrm{Id}_\mathbb{C}) - (3+6i)\, \mathrm{Id}_\mathbb{C} = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{C})} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\alpha^2 - (2-4i)\,\alpha - 3 - 6i\right) \mathrm{Id}_\mathbb{C} = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{C})}. \end{aligned}$$

En évaluant en $z = 1$, on obtient $\alpha^2 - (2-4i)\,\alpha - 3 - 6i = 0_\mathbb{C}$. La réciproque étant aussi vraie, on a

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 - (2-4i)\,\alpha - 3 - 6i = 0_\mathbb{C}.$$

Soit Δ le discriminant associé. On a

$$\Delta = (2-4i)^2 + 12 + 24i = 4 - 16i - 16 + 12 + 24i = 8i = 8\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Donc les racines carrées de Δ sont $2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = 2\,(1+i)$ et $-2\,(1+i)$. D'où

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{2-4i+2\,(1+i)}{2} = 2 - i \text{ OU } \alpha = \frac{2-4i-2\,(1+i)}{2} = -3i.$$

On peut vérifier son résultat par les relations racines-coefficients : $s = 2 - i - 3i = 2 - 4i$ *ok et* $p = (2-i)\,(-3i) = -6i - 3$ *ok !*

Conclusion,

$$\boxed{f_\alpha^2 - (2-4i)\, f_\alpha - (3+6i)\, f_\alpha^0 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{C})} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 2 - i \text{ OU } \alpha = -3i.}$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R_\theta = \varphi(\cos(\theta), \sin(\theta))$. On fixe $\theta \in \mathbb{R}$.

12. Soit $\theta' \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$\begin{aligned} R_\theta R_{\theta'} &= \varphi(\cos(\theta), \sin(\theta))\, \varphi(\cos(\theta'), \sin(\theta')) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') & -\sin(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta')\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta')\cos(\theta) & \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} \\ &= R_{\theta+\theta'}. \end{aligned}$$

Conclusion, en posant $u = \theta + \theta' \in \mathbb{R}$, on a bien

$$\boxed{\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2,\ \exists u = \theta + \theta', \qquad R_\theta R_{\theta'} = R_u.}$$

On pouvait aussi utiliser les applications f_α *:*

$$R_\theta R_{\theta'} = mat_\mathscr{C}\left(f_{\mathrm{e}^{i\theta}}\right) mat_\mathscr{C}\left(f_{\mathrm{e}^{i\theta'}}\right) = mat_\mathscr{C}\left(f_{\mathrm{e}^{i\theta}} \circ f_{\mathrm{e}^{i\theta'}}\right).$$

Or,

$$f_{\mathrm{e}^{i\theta}} \circ f_{\mathrm{e}^{i\theta'}} = \left(\mathrm{e}^{i\theta}\, Id_\mathbb{C}\right) \circ \left(\mathrm{e}^{i\theta'}\, Id_\mathbb{C}\right) = \mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{e}^{i\theta'}\, Id_\mathbb{C} = \mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}\, Id_\mathbb{C} = f_{\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}}$$

D'où

$$R_\theta R_{\theta'} = mat_\mathscr{C}\left(f_{\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}}\right) = R_{\theta+\theta'}.$$

13. Prenons $\theta' = -\,\theta$. Alors par la question précédente,
$$R_\theta R_{-\,\theta} = R_{\theta\,-\,\theta} = R_0 = I_2.$$
Donc
$$\boxed{R_\theta \in \mathrm{GL}_2\left(\mathbb{R}\right)}$$
De plus,
$$R_\theta^{-1} = R_{-\,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\,\theta\right) & -\sin\left(-\,\theta\right) \\ \sin\left(-\,\theta\right) & \cos\left(-\,\theta\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta\right) & \sin\left(\theta\right) \\ -\sin\left(\theta\right) & \cos\left(\theta\right) \end{pmatrix} = R_\theta^T$$
Ainsi, on a bien $R_\theta R_\theta^T = R_\theta R_\theta^{-1} = I_2$. Conclusion,
$$\boxed{R_\theta \in \mathscr{O}_2\left(\mathbb{R}\right).}$$

14. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a par la question 6.
$$f_{\mathrm{e}^{i\,\theta}}\left(z\right) = \mathrm{e}^{i\,\theta}\,z.$$
Conclusion,
$$\boxed{f_{\mathrm{e}^{i\,\theta}} \text{ est la rotation de centre } (0,0) \text{ et d'angle } \theta.}$$

Problème III - Probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}$. On possède $n+1$ urnes U_0, U_1, …, U_n. On remplie l'urne U_0 de deux boules rouges et deux boules vertes et toutes les urnes U_1, …, U_n de deux boules rouges. On pioche deux boules dans l'urne U_0 que l'on range dans U_1. On pioche alors deux boules dans U_1 que l'on range dans U_2. Ainsi à l'étape $k \in \mathbb{N}^*$, on pioche deux boules dans l'urne U_{k-1} que l'on met dans l'urne U_k. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules vertes contenues dans l'urne U_n à la fin de l'étape n et si $n=0$, on pose $X_0 = 2$.

1. On pioche une boule dans U_0 et on note Y_1 la variable aléatoire retournant 1 si l'on a obtenu une verte et 0 sinon. Sans remise, on pioche une seconde boule dans U_0, on note Y_2 la variable aléatoire retournant 1 si l'on a obtenu une verte et 0 sinon.

   (a) Puisque Y_1 n'a que deux issues 0 et 1 : alors Y_1 suit une loi de Bernoulli. Déterminons son paramètre. Puisque le tirage dans U_0 est équiprobable et que U_0 contient deux boules vertes et deux boules rouges, on a
$$\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$
   Conclusion,
$$\boxed{Y_1 \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right).}$$
   On pouvait aussi répondre
$$\boxed{Y_1 \sim \mathscr{U}(\llbracket 0;1 \rrbracket).}$$

   (b) De même, Y_2 suit une loi de Bernoulli. Par symétrie des hypothèses sur les boules vertes et rouges on peut anticiper que la probabilité d'obtenir une boule verte est la même que celle d'obtenir une boule rouge et donc $\mathbb{P}(Y_2 = 1) = 1/2$. Démontrons-le. On note que $((Y_1 = 0), (Y_1 = 1))$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,
$$\mathbb{P}(Y_2 = 1) = \mathbb{P}(Y_2 = 1 \mid Y_1 = 1)\,\mathbb{P}(Y_1 = 1) + \mathbb{P}(Y_2 = 1 \mid Y_1 = 0)\,\mathbb{P}(Y_1 = 0).$$
   Par la question précédente, $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = 0) = 1/2$. D'autre part, si $Y_1 = 1$ est réalisé, on a retiré une boule verte de l'urne U_0, il reste donc 1 verte et 2 rouges. Ainsi,
$$\mathbb{P}(Y_2 = 1 \mid Y_1 = 1) = \frac{1}{3}.$$
   De même, si $Y_1 = 0$ est réalisé, il reste 2 vertes et 1 rouge :
$$\mathbb{P}(Y_2 = 1 \mid Y_1 = 0) = \frac{2}{3}.$$
   D'où,
$$\mathbb{P}(Y_2 = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$
   Conclusion, Y_2 a la même loi que Y_1 :
$$\boxed{Y_2 \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right).}$$
   ou encore $Y_2 \sim \mathscr{U}(\llbracket 0;1 \rrbracket)$.

   (c) La variable X_1 est le nombre de boules vertes dans l'urne U_1 après avoir effectué les deux tirages dans U_0. Puisque Y_1 retourne le nombre de boule verte obtenue au premier tirage et Y_2 le nombre de boule verte obtenue au second tirage, on a
$$\boxed{X_1 = Y_1 + Y_2.}$$

(d) Puisque $\boxed{Y_1 \text{ et } Y_2 \text{ ne sont pas indépendantes}}$, X_1 ne suit pas a priori une loi binomiale.

(e) On observe que $(X_1 = 2) = (Y_1 = 1) \cap (Y_2 = 1)$. Donc par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(Y_2 = 1 \mid Y_1 = 1)\, \mathbb{P}(Y_1 = 1).$$

Par ce qui précède,

$$\mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{6}.}$$

(f) De façon analogue à la question précédente, $(X_1 = 0) = (Y_1 = 0) \cap (Y_2 = 0)$. Donc

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(Y_2 = 0 \mid Y_1 = 0)\, \mathbb{P}(Y_1 = 0).$$

On a $\mathbb{P}(Y_1 = 0) = 1/2$ et si $(Y_1 = 0)$ alors on a retiré une boule rouge.
Donc $\mathbb{P}(Y_2 = 0 \mid Y_1 = 0) = \frac{1}{3}$. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{6}.}$$

Or $X_1(\Omega) = [\![0;2]\!]$. Donc $((X_1 = i))_{i \in [\![0;2]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Donc

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0) - \mathbb{P}(X_1 = 2) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{2}{3}.}$$

On pouvait aussi observer que $(X_1 = 1) = (Y_1 = 0, Y_2 = 1) \sqcup (Y_1 = 1, Y_2 = 0)$ *et faire le calcul directement.*

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $(X_k = 2)$ est réalisé, alors cela signifie que l'on a deux boules vertes dans l'urne U_k à la fin de l'étape k, en plus des deux boules rouges que contient initialement l'urne U_k. Donc l'urne U_k contient deux boules rouges et deux boules vertes, comme l'urne U_0 au début de l'étape 1. Ainsi, on peut observer que

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = 2 \mid X_k = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 2).$$

Conclusion, par la question précédente,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(X_{k+1} = 2 \mid X_k = 2) = \frac{1}{6}.}$$

(b) Pour réaliser $(X_n = 2)$ il nous faut avoir conservé les deux boules vertes, celles initialement mises dans U_0. Donc à chaque étape, il a fallu piocher les deux boules vertes. Donc à la fin de chaque étape k, l'urne U_k contient les deux boules vertes :

$$(X_n = 2) = \bigcap_{k \in [\![1;n]\!]} (X_k = 2).$$

Puisque $(X_0 = 2)$ est un évènement certain, on conclut que

$$\boxed{(X_n = 2) = \bigcap_{k \in [\![0;n]\!]} (X_k = 2).}$$

(c) Par la question précédente et la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X_n = 2) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_k = 2 \,\middle|\, \bigcap_{i\in[\![0;k-1]\!]} (X_i = 2) \right) \underbrace{\mathbb{P}(X_0 = 2)}_{=1}.$$

Par la question précédente appliquée à $n = k$, on peut aussi écrire

$$\mathbb{P}(X_n = 2) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = 2 \mid X_{k-1} = 2).$$

Par la question 2.a

$$\mathbb{P}(X_n = 2) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{6} = \frac{1}{6^n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{6^n}.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $(X_n = i)_{i\in[\![0;2]\!]}$ forme un système complet d'évènements (encore vrai si $n = 0$), par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0)\,\mathbb{P}(X_n = 0)&\\ + \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1)\,\mathbb{P}(X_n = 1)&\\ + \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 2)\,\mathbb{P}(X_n = 2)&.\end{aligned}$$

Or si $(X_n = 0)$ est réalisé, l'urne U_n ne contient aucune boule verte et donc uniquement 4 boules rouges. En y piochant deux boules, nécessairement, on obtient deux boules rouges. Donc après le tirage de l'étape $n+1$, l'urne U_{n+1} contient nécessairement 4 boules rouges et aucune boule verte :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = 1.$$

Si $(X_n = 1)$ est réalisé, il y a 1 boule verte et 3 boules rouges dans l'urne U_n à la fin de l'étape n. On y pioche deux boules et l'on cherche la probabilité de ne pas obtenir de verte i.e. d'obtenir deux boules rouges : 3 chances sur 4 au premier tirage puis 2 chances sur 3 au second tirage. Au total :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

Enfin, de même si $(X_n = 2)$ est réalisé, il a 2 vertes et 2 rouges et on souhaite piocher 2 rouges :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 2) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{6}\mathbb{P}(X_n = 2).}$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{bmatrix}, \qquad A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} = AW_n$.

4. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
u \in \operatorname{Ker}(A - I_3) \quad & \Leftrightarrow \quad (A - I_3)\, u = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3y + z = 0 \\ -3y + 4z = 0 \\ -5z = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad y = z = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad u = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(A - I_3) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right).}$$

De même,

$$\begin{aligned}
u \in \operatorname{Ker}\left(A - \frac{1}{2} I_3\right) \quad & \Leftrightarrow \quad \left(A - \frac{1}{2} I_3\right) u = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x + 3y + z = 0 \\ 4z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad u = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}\left(A - \frac{1}{2} I_3\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
u \in \operatorname{Ker}\left(A-\frac{1}{6}I_3\right) &\Leftrightarrow \left(A-\frac{1}{6}I_3\right)u = 0_{\mathbb{R}^3}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&3&1\\0&2&4\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}5x+3y+z=0\\2y+4z=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}5x+3y+z=0\\2y+4z=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{-3y-z}{5}=\frac{6z-z}{5}=z\\y=-2z\end{cases}\\
&\Leftrightarrow u=\begin{bmatrix}z\\-2z\\z\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}\left(A-\frac{1}{6}I_3\right)=\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right).}$$

5. Posons $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $e_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$, $e_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$, $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $P=\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(e_1,e_2,e_3)$. Dès lors,

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Puisque P est triangulaire avec des pivots à chaque ligne, on observe que $P\in\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A : $\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f)=A$. Puisque $e_1\in\operatorname{Ker}(A-I_3)=\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, on a

$$f(e_1)-e_1=0_{\mathbb{R}^3} \qquad\Leftrightarrow\qquad f(e_1)=e_1.$$

De la même façon,

$$f(e_2)=\frac{1}{2}e_2 \qquad \text{et} \qquad f(e_3)=\frac{1}{6}e_3.$$

Directement, on en déduit que

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/6\end{pmatrix}=D.$$

Puisque $P=\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$, on conclut par la formule de changement de base que

$$D=P^{-1}AP \qquad\Leftrightarrow\qquad A=PDP^{-1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{pour } P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ on a } P\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ et } A=PDP^{-1}.}$$

6. Procédons à un l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$
\begin{array}{lll}
P \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \end{array} & I_3 \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3 & L_2 \leftarrow -L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = P.
\end{array}
$$

Vérification,

$$P^2 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I_3 \text{ OK!}$$

On retrouve bien que P est inversible et

$$\boxed{P^{-1} = P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.}$$

7. Puisque $P = P^{-1} \neq P^T$, par unicité de la matrice inverse, $PP^T \neq I_3$. Conclusion,

$$\boxed{P \notin \mathscr{O}_3(\mathbb{R}).}$$

8. On montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1} = PD^nP.$$

D'autre part, on montre également par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = A^nW_0$. Donc on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad W_n = PD^nPW_0.}$$

9. Calculons,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad D^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{6^n}\end{pmatrix}.$$

Et

$$W_0 = \begin{bmatrix}\mathbb{P}(X_0 = 0)\\ \mathbb{P}(X_0 = 1)\\ \mathbb{P}(X_0 = 2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
W_n = PD^nPW_0 &= PD^n \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \\
&= P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{6^n}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -\frac{1}{2^{n-1}}\\ \frac{1}{6^n}\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{6^n}\\ \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{6^n}\\ \frac{1}{6^n}\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad W_n = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{6^n} \\ \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{6^n} \\ \frac{1}{6^n} \end{bmatrix}.}$$

10. Par la question précédente,

$$\lim_{n \to +\infty} W_n = \lim_{n \to +\infty} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{6^n} \\ \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{6^n} \\ \frac{1}{6^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} W_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.}$$

Autrement dit $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 2) = 0$. Ainsi, asymptotiquement, on aura perdu les deux boules vertes en route.

$\boxed{\text{Il était prévisible que de garder une ou deux boule(s) verte(s) infiniment serait impossible.}}$